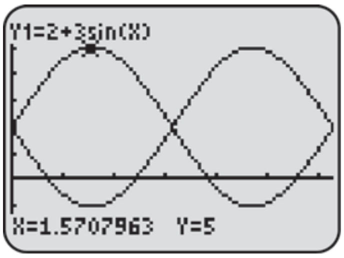
10 Periodieke functies

10.1 Sinus, cosinus en tangens

bladzijde 42

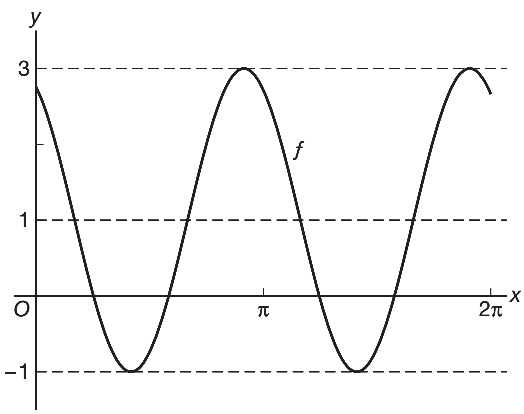
1 **a**



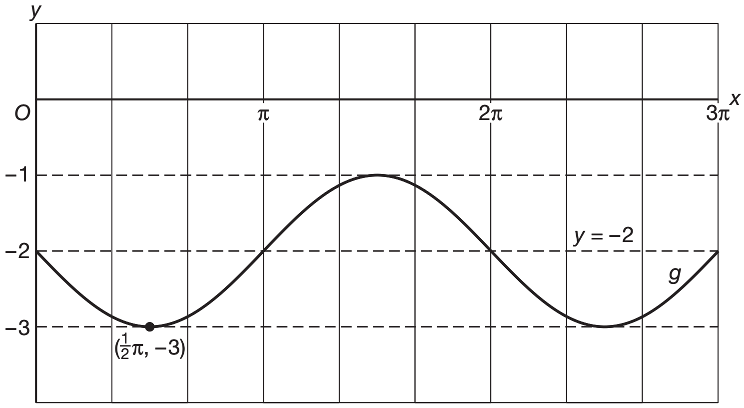
b De amplitude is 3 bij beide grafieken.

bladzijde 43

2 **a** $f(x) = 1 - 2\sin(2x - \frac{1}{3}\pi) = 1 - 2\sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$
evenwichtsstand 1
amplitude 2
periode $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$
$-2 < 0$ dus grafiek dalend door beginpunt $(\frac{1}{6}\pi, 1)$



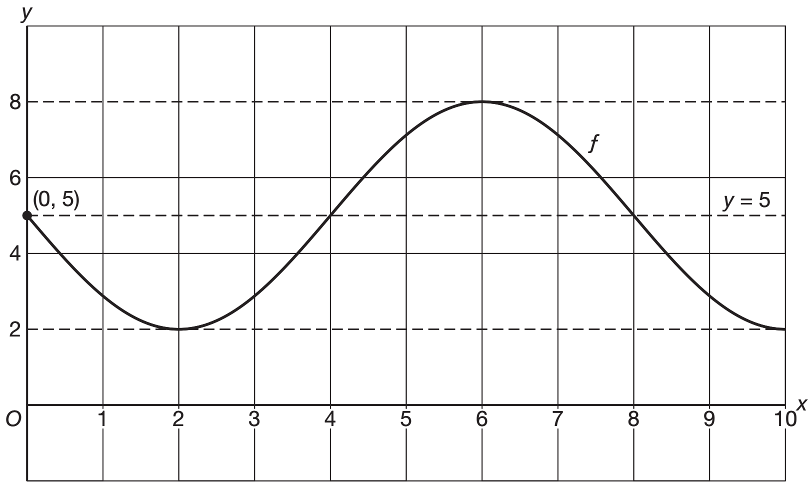
b $g(x) = -2 - \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$
evenwichtsstand -2
amplitude 1
periode 2π
$-1 < 0$ dus beginpunt $(\frac{1}{2}\pi, -3)$ is laagste punt



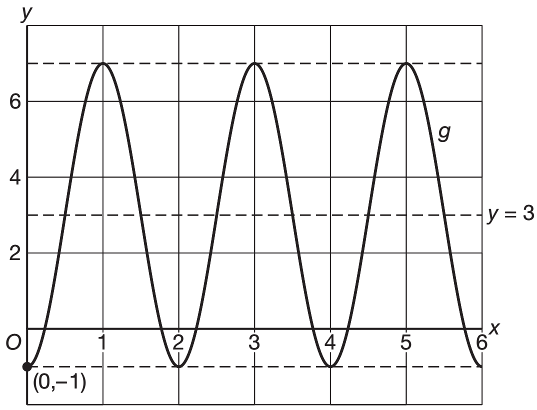
c $f(x) = 5 - 3\sin(\frac{1}{4}\pi x)$

evenwichtsstand 5
amplitude 3
periode $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$

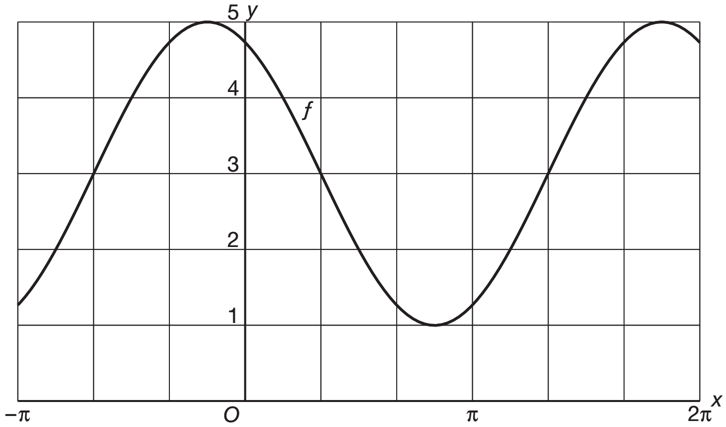
$-3 < 0$ dus grafiek dalend door beginpunt $(0, 5)$



d $g(x) = 3 - 4\cos(\pi x)$
evenwichtsstand 3
amplitude 4
periode $\dfrac{2\pi}{\pi} = 2$
$-4 < 0$ dus beginpunt $(0, -1)$ is laagste punt



3 **a** $f(x) = 3 - 2\sin(x - \frac{1}{3}\pi)$
evenwichtsstand 3
amplitude 2
periode 2π
$-2 < 0$ dus dalend door beginpunt $(\frac{1}{3}\pi,\ 3)$.



b De grafiek gaat dalend door $(\frac{1}{3}\pi,\ 3)$.
De periode is 2π.
Dus de grafiek gaat stijgend door $(1\frac{1}{3}\pi,\ 3)$ omdat $(1\frac{1}{3}\pi,\ 3)$ een halve periode rechts van $(\frac{1}{3}\pi,\ 3)$ ligt.

c De x-coördinaat $-\frac{1}{6}\pi$ is $\frac{1}{4}$ periode $= \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\pi$ kleiner dan $\frac{1}{3}\pi$.

De evenwichtsstand is 3 en de amplitude is 2, dus is het maxium 5.

Dus is $y = 3 + 2\cos(x + \frac{1}{6}\pi)$ een sinusoïde met evenwichtsstand 3, amplitude 2,

periode 2π en hoogste punt $(-\frac{1}{6}\pi, 5)$ en dus hoort ook de formule $y = 3 + 2\cos(x + \frac{1}{6}\pi)$

bij de grafiek van f.

d $y = 3 - 2\cos(x - \frac{5}{6}\pi)$ omdat f een minimum heeft voor $x = \frac{5}{6}\pi$.

4 **a** $y = a + b\sin(c(x - d))$
$a = \dfrac{50 + -10}{2} = 20$
$b = 50 - 20 = 30$
periode is 50, dus $c = \dfrac{2\pi}{50} = \frac{1}{25}\pi$
beginpunt (0, 20), dus $d = 0$

Dus $y = 20 + 30\sin(\frac{1}{25}\pi x)$.

b $y = a + b\sin(c(x - d))$

beginpunt (25, 20), dus $d = 25$

Dus $y = 20 - 30\sin(\frac{1}{25}\pi(x - 25))$.

c $y = a + b\cos(c(x - d))$

beginpunt(12,5; 50), dus $d = 12{,}5$

Dus $y = 20 + 30\cos(\frac{1}{25}\pi(x - 12{,}5))$.

d $y = a + b\cos(c(x - d))$

beginpunt (37,5; −10), dus $d = 37{,}5$

Dus $y = 20 - 30\cos(\frac{1}{25}\pi(x - 37{,}5))$.

5 $f(x) = 20 - 15\sin(4x - \frac{1}{3}\pi) = 20 - 15\sin(4(x - \frac{1}{12}\pi))$

evenwichtsstand 20

amplitude 15

periode $\dfrac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$

a Stijgend door de evenwichtsstand in $(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi, 20) = (\frac{1}{3}\pi, 20)$.

Dus $y = 20 + 15\sin(4(x - \frac{1}{3}\pi))$.

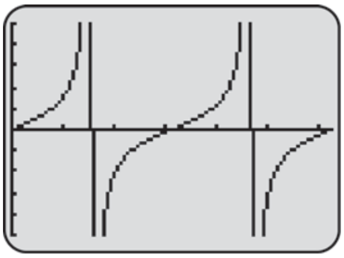
b Een hoogste punt is $(\frac{1}{12}\pi + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\pi, 35) = (\frac{11}{24}\pi, 35)$.

Dus $y = 20 + 15\cos(4(x - \frac{11}{24}\pi))$.

c Een laagste punt is $(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\pi, 5) = (\frac{5}{24}\pi, 5)$.

Dus $y = 20 - 15\cos(4(x - \frac{5}{24}\pi))$.

6 **a**



b De lijnen $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$

bladzijde 46

7 **a** Er staat niet met domein $[0, 2\pi]$ omdat $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$ niet tot het domein behoren.

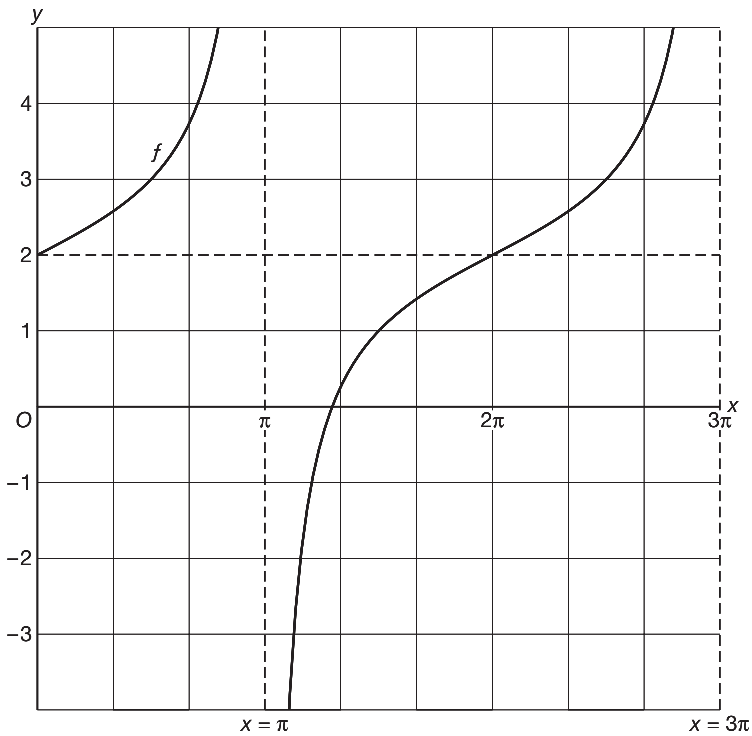
b De periode is π.

c Nee, de tangens heeft geen maximum en geen minimum.

d Het beginpunt is $(0, 3)$.

8 **a** Beginpunt $(0, 2)$ en periode 2π.

b



c Voer in $y_1 = 2 + \tan(\frac{1}{2}x)$.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x \approx 4{,}07$.

d $f(x) = 3$ geeft $2 + \tan(\frac{1}{2}x) = 3$

$\tan(\frac{1}{2}x) = 1$

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi \vee \frac{1}{2}x = 1\frac{1}{4}\pi$

$x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 2\frac{1}{2}\pi$

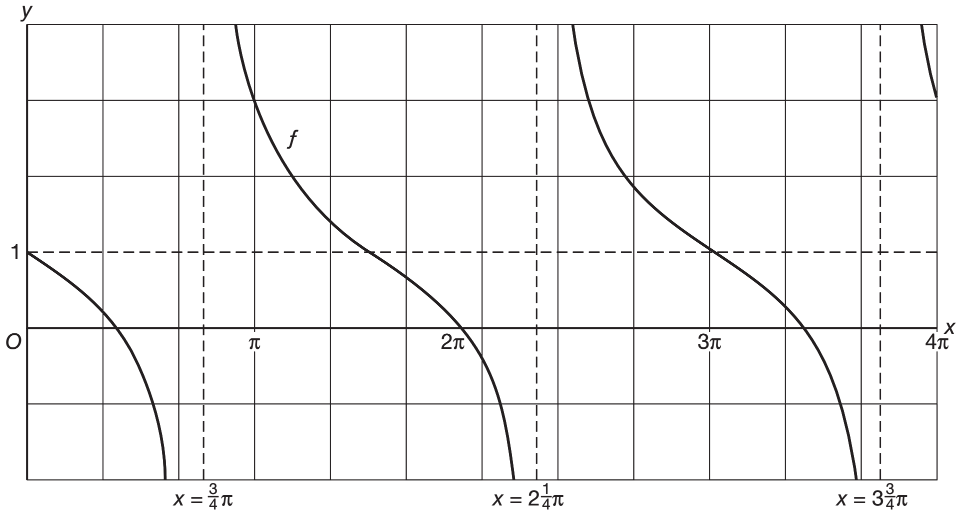
Dus $(\frac{1}{2}\pi, 3)$ en $(2\frac{1}{2}\pi, 3)$.

9 **a** $f(x) = 1 - \tan(\frac{2}{3}x)$ met domein $[0, 4\pi]$. (fout in de 1e oplage van het leerboek)

periode $\frac{\pi}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\pi$

$-1 < 0$ dus dalend door beginpunt $(0, 1)$.

b



c De grafiek heeft de verticale asymptoten: $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = 2\frac{1}{4}\pi$ en $x = 3\frac{3}{4}\pi$.

d $f(\frac{3}{8}\pi) = 1 - \tan(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}\pi) = 1 - \tan(\frac{1}{4}\pi) = 1 - 1 = 0$

Het tweede nulpunt is $\frac{3}{8}\pi + \frac{3}{2}\pi = 1\frac{7}{8}\pi$ en het derde nulpunt is $\frac{3}{8}\pi + 2 \cdot \frac{3}{2}\pi = 3\frac{3}{8}\pi$.

e $f(x) < 0$ geeft $\frac{3}{8}\pi < x < \frac{3}{4}\pi \vee 1\frac{7}{8}\pi < x < 2\frac{1}{4}\pi \vee 3\frac{3}{8}\pi < x < 3\frac{3}{4}\pi$

10 **a** beginpunt $(0, 3)$

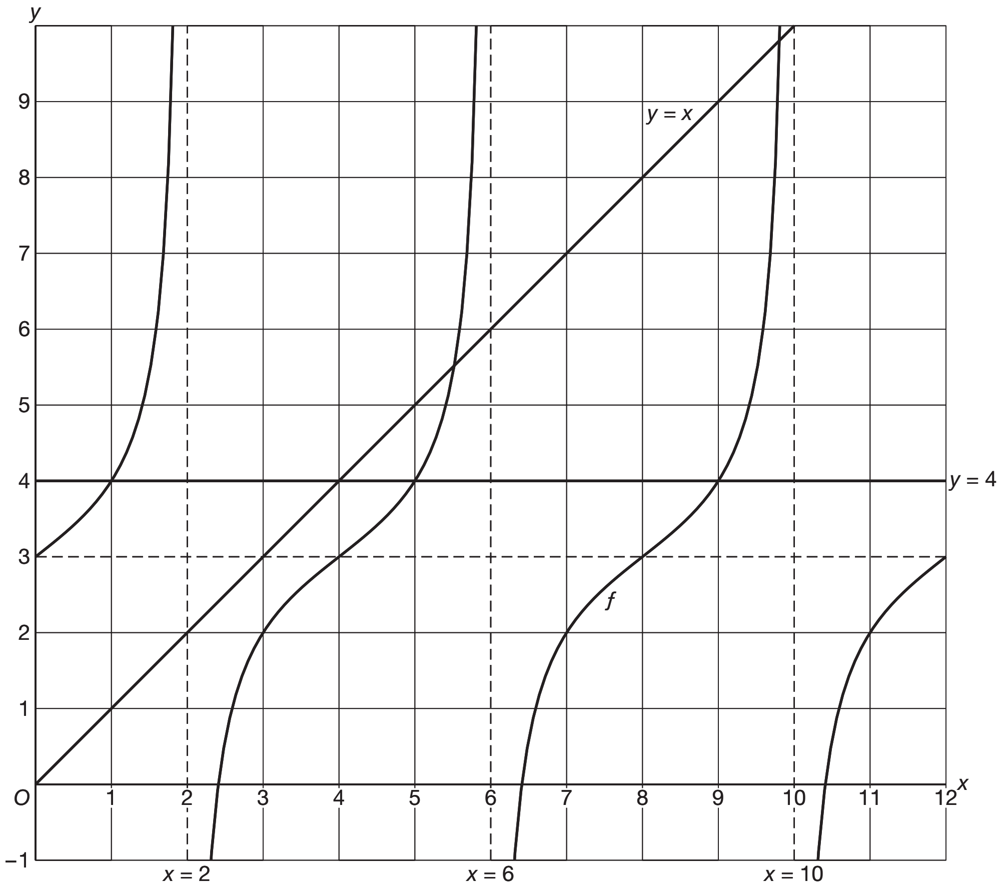
periode $\frac{\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 4$

b $\frac{1}{4}\pi x = \frac{1}{2}\pi$ geeft asymptoot $x = 2$

$\frac{1}{4}\pi x = 1\frac{1}{2}\pi$ geeft asymptoot $x = 6$

$\frac{1}{4}\pi x = 2\frac{1}{2}\pi$ geeft asymptoot $x = 10$

c



d $f(x) = 4$ geeft $3 + \tan(\frac{1}{4}\pi x) = 4$

$$\tan(\tfrac{1}{4}\pi x) = 1$$

$$\tfrac{1}{4}\pi x = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = 1 + k \cdot 4$$

x op [0, 12] geeft $x = 1 \ \vee \ x = 5 \ \vee \ x = 9$

$f(x) > 4$ geeft $1 < x < 2 \ \vee \ 5 < x < 6 \ \vee \ 9 < x < 10$

e Voer in $y_1 = 3 + \tan(\frac{1}{4}\pi x)$ en $y_2 = x$.

De optie intersect geeft $x \approx 5{,}52$ en $x \approx 9{,}81$.

$f(x) > x$ geeft $0 \leq x < 2 \ \vee \ 5{,}52 < x < 6 \ \vee \ 9{,}81 < x < 10$

10.2 Samengestelde trillingen

bladzijde 48

11 **a** De optie maximum geeft de top (0,785; 1,414).

Omdat de x-as de evenwichtsstand is, geldt $b \approx 1{,}414$.

b De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x_B \approx 5{,}498$.

De grafiek van y_3 gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt (5,498; 0), dus is $y_3 = 1{,}414 \sin(x - 5{,}498)$.

c Ook de grafiek van $y_4 = y_1 - y_2$ is een sinusoïde met evenwichtsstand 0.

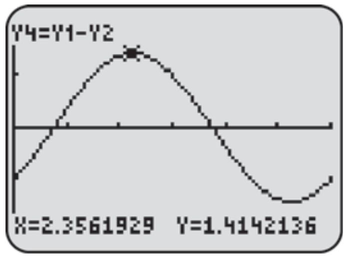
De optie maximum geeft de top (2,356; 1,414), dus $b \approx 1{,}414$.

De grafiek van y_4 gaat stijgend door de evenwichtsstand in het punt C.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x_C \approx 0{,}785$.

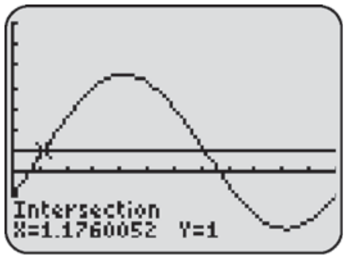
Dus is $y_4 = 1{,}414 \sin(x - 0{,}785)$.

Dus $b \approx 1{,}414$ en $d \approx 0{,}785$.



bladzijde 49

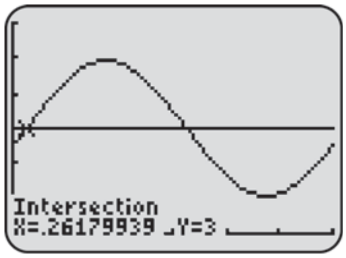
12 Zie het voorbeeld. Zet y_3 uit en voer in $y_4 = y_1 - y_2$.
De opties maximum en minimum bij y_4 geven de toppen (4,318; 4,606) en (10,601; –2,606).
Dus $a \approx \dfrac{4{,}606 + -2{,}606}{2} = 1$ en $b \approx 4{,}606 - 1 = 3{,}606$.
Voer in $y_5 = 1$.
Intersect met y_4 en y_5 geeft het snijpunt (1,176; 1).
Dus $d \approx 1{,}176$.
Bij y_1 en y_2 is $c = \frac{1}{2}$, dus ook bij y_4 is $c = \frac{1}{2}$.
Je krijgt $y_4 = 1 + 3{,}606 \sin(\frac{1}{2}(x - 1{,}176))$.



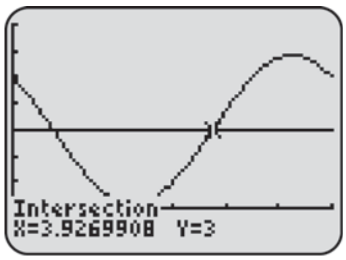
13 **a** De som van de evenwichtsstanden van y_1 en y_2 is 2 + 1 = 3.
Dat is precies de evenwichtsstand van $y_3 = y_1 + y_2$.
Het verschil van de evenwichtsstand van y_1 en y_2 is 2 – 1 = 1.
Dat is precies de evenwichtsstand van $y_4 = y_1 - y_2$.
b In het linkersnijpunt met de evenwichtsstand is de grafiek van y_3 dalend. In het beginpunt (d, a) moet de grafiek stijgend zijn.
c De waarden van a, b en c zijn hetzelfde.
Schrijf je de formule met een cosinus dan is het beginpunt (d, $a + b$).
Het beginpunt is dus een hoogste punt.
Met de optie maximum is de top (1,966; 6,606) gevonden, dus $d \approx 1{,}966$.
Dus $y_3 = 3 + 3{,}605 \cos(\frac{1}{2}(x - 1{,}966))$.
Ook bij y_4 geldt dat de waarden van a, b en c ongewijzigd blijven.
De optie maximum geeft de top (4,318; 4,606), dus $d \approx 4{,}318$.
Dus $y_4 = 1 + 3{,}606 \cos(\frac{1}{2}(x - 4{,}318))$.

bladzijde 50

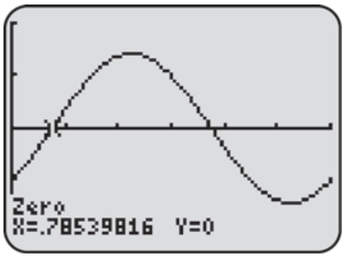
14 Voer in $y_1 = 3 + \sin(x)$, $y_2 = \sin(x - \frac{1}{6}\pi)$ en $y_3 = y_1 + y_2$.
Bij y_1 en y_2 is $c = 1$, dus ook bij y_3 is $c = 1$.
Neem bijvoorbeeld Xmin = 0, Xmax = 2π, Ymin = 0 en Ymax = 6.
De opties maximum en minimum bij y_3 geven de toppen (1,833; 4,932) en (4,974; 1,068).
Dus $a = \dfrac{4{,}932 + 1{,}068}{2} = 3$ en $b \approx 4{,}932 - 3 = 1{,}932$.
Voer in $y_4 = 3$.
Intersect met y_3 en y_4 geeft het snijpunt (0,262; 3).
Dus $d \approx 0{,}262$.
Je krijgt $y_3 = 3 + 1{,}932 \sin(x - 0{,}262)$.



15 Voer in $y_1 = 4 - 2\sin(x)$, $y_2 = -1 + 2\cos(x)$ en $y_3 = y_1 + y_2$.
Bij y_1 en y_2 is $c = 1$, dus ook bij y_3 is $c = 1$.
Neem bijvoorbeeld Xmin = 0, Xmax = 2π, Ymin = –1 en Ymax = 7.
De opties minimum en maximum bij y_3 geven de toppen (2,356; 0,172) en (5,450; 5,828).
Dus $a = \dfrac{0{,}172 + 5{,}828}{2} = 3$ en $b \approx 5{,}828 - 3 = 2{,}828$.
Voer in $y_4 = 3$.
Intersect met y_3 en y_4 geeft het snijpunt (3,927; 3).
Dus $d \approx 3{,}927$.
Je krijgt $y_3 = 3 + 2{,}828 \sin(x - 3{,}927)$.



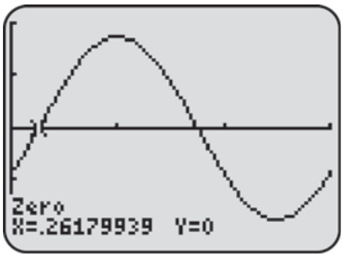
16 **a** $k = 0$ geeft $y_0 = \sin(x) + \sin(x - 0 \cdot \frac{1}{6}\pi)$
$y_0 = \sin(x) + \sin(x)$
$y_0 = 2\sin(x)$
Dus $b = 2$ en $d = 0$.



b $k = 3$ geeft $y_3 = \sin(x) + \sin(x - 3 \cdot \frac{1}{6}\pi)$
$y_3 = \sin(x) + \sin(x - \frac{1}{2}\pi)$
Voer y_3 in. Kies bijvoorbeeld Xmin = 0, Xmax = 2π, Ymin = –2 en Ymax = 2.
De optie maximum geeft de top (2,356; 1,414), dus $b \approx 1{,}414$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft het punt (0,785; 0), dus $d \approx 0{,}785$.

c $k = 6$ geeft $y_3 = \sin(x) + \sin(x - 6 \cdot \frac{1}{6}\pi)$
$y_3 = \sin(x) + \sin(x - \pi)$
Merk op: de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \sin(x - \pi)$ zijn elkaar gespiegelde in de x-as.
Daarom is $y = \sin(x) + \sin(\pi - x) = 0$.
Dus $b = 0$ en d mag elk getal zijn.

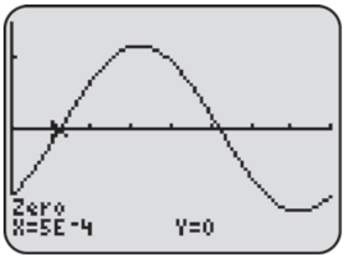
17 **a** $q = \frac{1}{6}\pi$ geeft $y = \sin(2x) + \sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$
Voer de formule in bij y_1.
Kies bijvoorbeeld Xmin = 0, Xmax = π, Ymin = –2 en Ymax = 2.
De optie maximum geeft de top (1,047; 1,732).
De optie minimum geeft de top (2,618; –1,732).
Dus $a = 0$ en $b \approx 1{,}732$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft het punt (0,262; 0), dus $d \approx 0{,}262$.
Dus $y = 1{,}732\sin(2(x - 0{,}262))$.



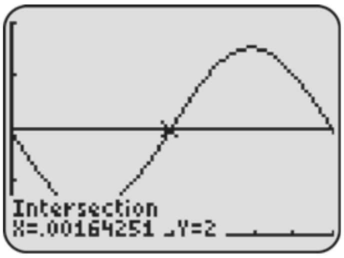
b Om amplitude 2 te krijgen moeten de grafieken van $y = \sin(2x)$ en $y = \sin(2(x - q))$ samenvallen. Dat is onder andere het geval voor $q = 0$ en voor $q = \pi$.

c Om een horizontale lijn te krijgen moeten de grafieken van $y = \sin(2x)$ en $y = \sin(2(x - q))$ elkaars gespiegelde in de x-as zijn.
Dat is onder andere het geval als $q = \frac{1}{2}\pi$ en als $q = 1\frac{1}{2}\pi$.

18 **a** Voer in $y_1 = u_1$, $y_2 = u_2$, $y_3 = u_3$, $y_4 = u_4$ en $y_5 = u_5$.
Kies bijvoorbeeld Xmin = 0, Xmax = $\frac{1}{300}$, Ymin = –1,5 en Ymax = 1,5.
Bij y_1 en y_2 is $c = 600\pi$, dus ook bij y_4 is $c = 600\pi$.
Plot y_4 en zet de andere vier formules uit.
De opties maximum en minimum geven de toppen (0,0013; 1,1756) en (0,0030; –1,1756).
Dus $a = \dfrac{1{,}1756 + -1{,}1756}{2} = 0$ en $b \approx 1{,}1756$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft het punt (0,0005; 0).
Je krijgt $u_4 = 1{,}756\sin(600\pi(x - 0{,}0005))$.



b Kies bijvoorbeeld Xmin = 0, Xmax = $\frac{1}{300}$, Ymin = 0 en Ymax = 4.
Plot y_5 en zet de andere vier formules uit.
De opties minimum en maximum geven de toppen (0,0008; 0,4759) en (0,0025; 3,541).
Dus $a = \dfrac{0{,}4759 + 3{,}5241}{2} = 2$ en $b \approx 3{,}541 - 2 = 1{,}5241$.
Voer in $y_6 = 2$.
Intersect met y_5 en y_6 geeft het snijpunt (0,0016; 2).
Dus $d \approx 0{,}0016$
Je krijgt $u_5 = 2 + 1{,}524\sin(600\pi(x - 0{,}0016))$.



19 **a** De periode van $y_1 = \sin(2x)$ is $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

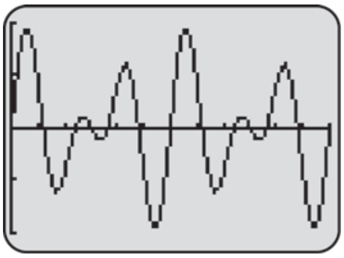
De periode van $y_2 = \sin(3x)$ is $\dfrac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

b y_1 is na π, 2π, 3π, 4π, … telkens weer hetzelfde.

y_2 is na $\frac{2}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi, 2\pi, 2\frac{2}{3}\pi, 3\frac{1}{3}\pi, 4\pi, \ldots$ telkens weer hetzelfde.

Dus is y_3 na 2π, 4π, … telkens weer hetzelfde.
Dus de periode van y_3 is 2π.

c



d De grafiek van een formule van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$ heeft telkens even hoge toppen.
Dat is hier niet het geval, dus is y_3 niet te schrijven in de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$.

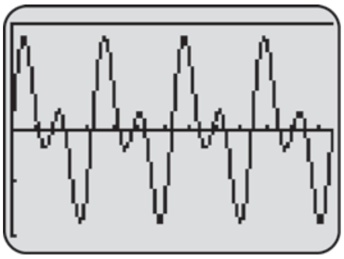
20 **a** De periode van $y_1 = \sin(2x)$ is $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

De periode van $y_2 = \sin(4x)$ is $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

b y_1 is hetzelfde na $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$.

y_2 is hetzelfde na $\frac{1}{2}\pi, \pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\pi, 2\frac{1}{2}\pi, 3\pi, \ldots$.

Dus zal $y_3 = y_1 + y_2$ periode π hebben.



21 **a** $y_1 = \sin(x)$ heeft periode 2π, dus na $2\pi, 4\pi, \ldots$ hetzelfde.

$y_2 = \sin(3x)$ heeft periode $\frac{2}{3}\pi$, dus na $\frac{2}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi, 2\pi, \ldots$ hetzelfde.

$y_3 = y_1 + y_2$ is na $2\pi, 4\pi, \ldots$ hetzelfde dus periode zal 2π zijn.

b $y_1 = \sin(3x)$ heeft periode $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$, dus hetzelfde na $\frac{2}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi, 2\pi, \ldots$.

$y_2 = \sin(6x)$ heeft periode $\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$, dus hetzelfde na $\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \ldots$.

$y_3 = y_1 + y_2$ is hetzelfde na $\frac{2}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi, \ldots$ dus periode zal $\frac{2}{3}\pi$ zijn.

c $y_1 = 1{,}2\sin(4x)$ heeft periode $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$, dus hetzelfde na $\frac{1}{2}\pi, \pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\pi, \ldots$.

$y_2 = 0{,}8\sin(5x)$ heeft periode $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$, dus hetzelfde na $\frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, 1\frac{1}{5}\pi, 1\frac{3}{5}\pi, 2\pi, \ldots$.

$y_3 = y_1 + y_2$ is hetzelfde na 2π, dus periode zal 2π zijn.

d $y_1 = 3\sin(2x)$ heeft periode π, dus hetzelfde na $\pi, 2\pi, \ldots$.

$y_2 = 4\sin(5x)$ heeft periode $\frac{2}{5}\pi$, dus hetzelfde na $\frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, 1\frac{1}{5}\pi, 1\frac{3}{5}\pi, 2\pi, \ldots$.

$y_3 = y_1 + y_2$ is hetzelfde na $2\pi, \ldots$, dus periode zal 2π zijn.

bladzijde 52

22 **a**

	$u_1 = \sin(100\pi t)$	$u_2 = \sin(101\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	100π periodes	101π periodes	deel door π
in $[0, 2]$	100 periodes	101 periodes	

Dus de periode van $u = \sin(100\pi t) + \sin(101\pi t)$ is 2 seconden.

b

	$u_1 = \sin(100t)$	$u_2 = \sin(101t)$
in $[0, 2\pi]$	100 periodes	101 periodes

Dus de periode van $u = \sin(100t) + \sin(101t)$ is 2π seconden.

c

	$u_1 = \sin(100\pi t)$	$u_2 = \sin(105\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	100π periodes	105π periodes	deel door 5π
in $[0, \frac{2}{5}]$	20 periodes	21 periodes	

Dus de periode van $u = \sin(100\pi t) + \sin(105\pi t)$ is $\frac{2}{5}$ seconde.

d

	$u_1 = 2\sin(100\pi t)$	$u_2 = 1{,}5\sin(200\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	100π periodes	200π periodes	deel door 100π
in $[0; 0{,}02]$	1 periode	2 periodes	

Dus de periode van $u = 2\sin(100\pi t) + 1{,}5\sin(200\pi t)$ is 0,02 seconde.

e

	$u_1 = \sin(100t)$	$u_2 = \sin(25t)$	
in $[0, 2\pi]$	100 periodes	25 periodes	deel door 25
in $[0, \frac{2}{25}\pi]$	4 periodes	1 periode	

Dus de periode van $u = \sin(100t) + \sin(25t)$ is $\frac{2}{25}\pi$ seconde.

f

	$u_1 = 3\sin(\frac{1}{4}\pi t)$	$u_2 = 6\sin(\frac{1}{3}\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	$\frac{1}{4}\pi$ periode	$\frac{1}{3}\pi$ periode	deel door π
in $[0, 2]$	$\frac{1}{4}$ periode	$\frac{1}{3}$ periode	vermenigvuldig met 12
in $[0, 24]$	3 periodes	4 periodes	

Dus de periode van $u = 3\sin(\frac{1}{4}\pi t) + 6\sin(\frac{1}{3}\pi t)$ is 24 seconden.

23

	$u_1 = \sin(660\pi t)$	$u_2 = \sin(661\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	660π periodes	661π periodes	deel door π
in $[0, 2]$	660 periodes	661 periodes	

Dus de periode van de zweving $u = \sin(600\pi t) + \sin(661\pi t)$ is 2 seconden.

bladzijde 53

24 **a** u is een samenstelling van vier trillingen, namelijk

trilling	frequentie in Hz	periode in seconde
$u_1 = 1{,}5\sin(700\pi t)$	350	$\frac{1}{350}$
$u_2 = 0{,}2\sin(1400\pi t)$	700	$\frac{1}{700}$
$u_3 = 0{,}3\sin(2100\pi t)$	1050	$\frac{1}{1050}$
$u_4 = 0{,}1\sin(2800\pi t)$	1400	$\frac{1}{1400}$

De frequenties van de boventonen zijn 700, 1050 en 1400 Hz.

b In één periode van u_1 passen precies twee perioden van u_2, drie perioden van u_3 en vier perioden van u_4.

De periode van de samengestelde trilling is dus dezelfde als die van u_1, namelijk $\frac{1}{350}$ seconde.

25 **a**

	$u_1 = 0{,}6\sin(500\pi t)$	$u_2 = 0{,}6\sin(550\pi t)$	
in $[0, 2\pi]$	500π periodes	550π periodes	deel door 50π
in $[0, \frac{2}{50}]$	10 periodes	11 periodes	

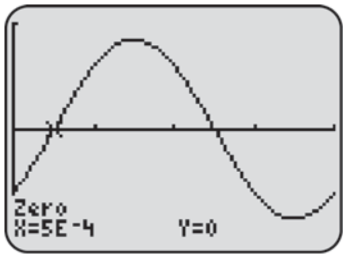
Dus de periode van $u_4 = u_1 + u_2$ is $\dfrac{2}{50} = 0{,}04$ seconde.

b Voer in $y_1 = u_1$, $y_3 = u_3$ en $y_5 = y_1 + y_3$.
Bij y_1 en y_3 is $c = 500\pi$, dus ook bij y_5 is $c = 500\pi$.
Plot y_5 en zet alle andere functies uit.

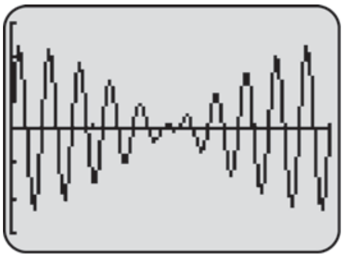
Neem bijvoorbeeld Xmin = 0, Xmax = $\frac{1}{250}$, Xmin = −1 en Ymax = 1.

De optie maximum geeft de top (0,0015; 0,8485).
De optie minimum geeft de top (0,0035; −0,8485).
Dus $b = 0{,}8485$.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft het punt (0,0005; 0), dus $d \approx 0{,}0005$.
Je krijgt $u = 0{,}8485 \sin(500\pi(x - 0{,}0005))$.



c Neem bijvoorbeeld Xmin = 0, Xmax = 0,04, Ymin = −1,5 en Ymax = 1,5.



10.3 Werken met Goniometrische formules

bladzijde 55

26 **a** $y = \sin(x)$

$\downarrow$ translatie $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$

$y = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$

Dus $\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos(x)$.

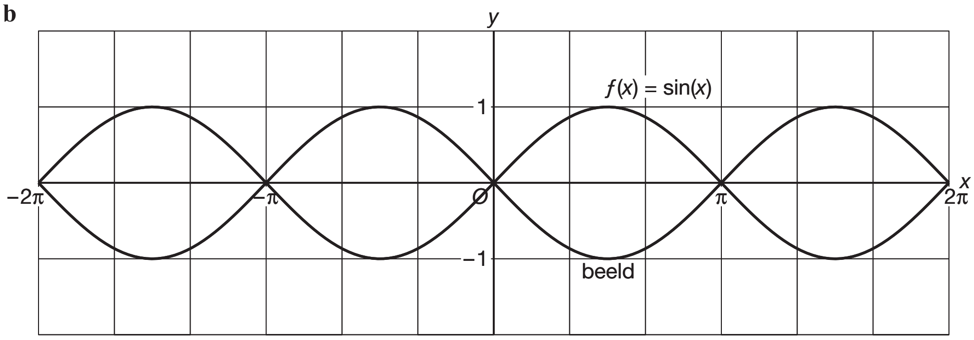
b $y = \cos(x)$

$\downarrow$ translatie $(\frac{1}{2}\pi, 0)$

$y = \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$

Dus $\cos(x - \frac{1}{2}\pi) = \sin(x)$.

27 **a, b**



De beeldgrafiek is ook het beeld van de grafiek van f bij de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met −1.

c $y = \sin(x)$

$\downarrow$ verm. x-as, −1

$y = -\sin(x)$

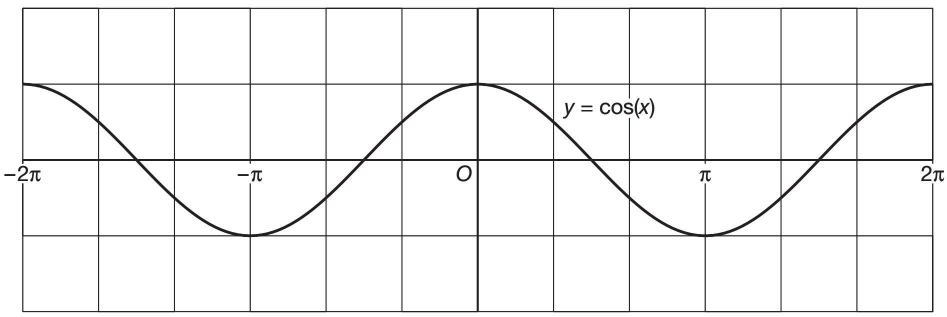
$y = \sin(x)$

$\downarrow$ verm. y-as, −1

$y = \sin(-x)$

Dus $\sin(-x) = -\sin(x)$.

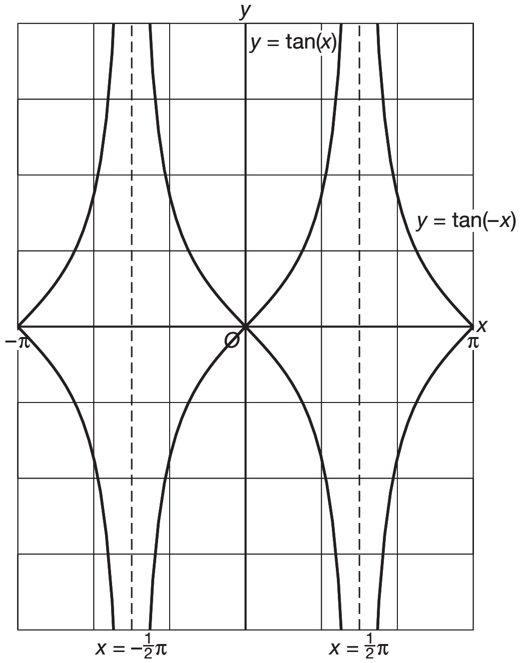
d



Na vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met −1 verandert de grafiek van $y = \cos(x)$ niet.
Dus $\cos(-x) = \cos(x)$.

28 **a** $\tan(-A) = \dfrac{\sin(-A)}{\cos(-A)} = \dfrac{-\sin(A)}{\cos(A)} = -\dfrac{\sin(A)}{\cos(A)} = -\tan(A)$

b



Vermenigvuldig de grafiek van $y = \tan(x)$ ten opzichte van de x-as met -1.
Het beeld is ook de gespiegelde grafiek van $y = \tan(x)$ in de y-as.
Dus $-\tan(x) = \tan(-x)$ ofwel $\tan(-x) = -\tan(x)$.

29 **a** $u = 3 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) = 3 + \frac{1}{2}\sin(2\pi t + \frac{1}{2}\pi) = 3 + \frac{1}{2}\sin(2\pi(t + \frac{1}{4})) = 3 + \frac{1}{2}\sin(2\pi(t - (-\frac{1}{4}))$

b $u = 5 + 2\sin(50\pi t) = 5 + 2\cos(50\pi t - \frac{1}{2}\pi) = 5 + 2\cos(50\pi(t - \frac{1}{100}))$

30 **a** $\sin(-2x) + 3\sin(2x) = -\sin(2x) + 3\sin(2x) = 2\sin(2x)$

b $\cos(x - \frac{1}{2}\pi) + 4\sin(x) = \sin(x) + 4\sin(x) = 5\sin(x)$

c $3\sin(x + \frac{1}{2}\pi) - 2\cos(x) = 3\cos(x) - 2\cos(x) = \cos(x)$

d $\cos(2x - \frac{1}{2}\pi) + 3\sin(-2x) = \sin(2x) - 3\sin(2x) = -2\sin(2x)$

31 **a** $\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos(-(-\frac{1}{2}\pi + x)) = \cos(-(x - \frac{1}{2}\pi)) = \cos(x - \frac{1}{2}\pi) = \sin(x)$

b $\sin(-x - \frac{1}{2}\pi) = \sin(-(x + \frac{1}{2}\pi)) = -\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = -\cos(x)$

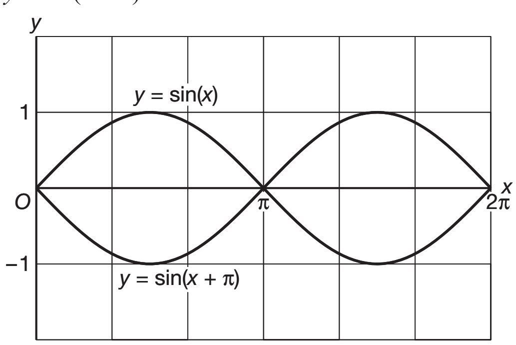
32 **a** $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(3x + \frac{1}{2}\pi)} = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = \tan(3x)$

b $\dfrac{\cos(\frac{1}{2}(x - \pi))}{\cos(-\frac{1}{2}x)} = \dfrac{\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\pi)}{\cos(\frac{1}{2}x)} = \dfrac{\sin(\frac{1}{2}x)}{\cos(\frac{1}{2}x)} = \tan(\frac{1}{2}x)$

33 **a** $y = \sin(x)$

$\downarrow$ translatie $(-\pi, 0)$

$y = \sin(x + \pi)$

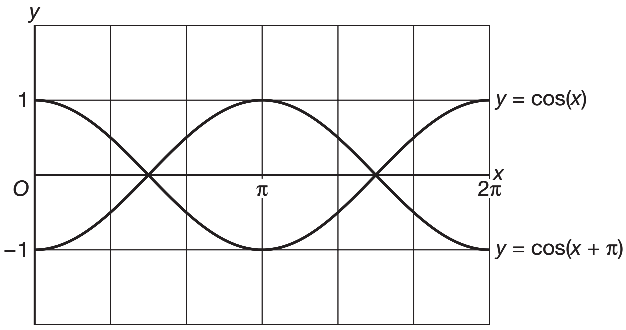


Dus $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.

b $y = \cos(x)$

$\big\downarrow$ translatie $(-\pi, 0)$

$y = \cos(x + \pi)$

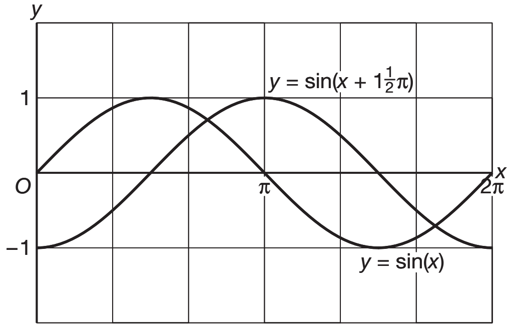


Dus $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

c $y = \sin(x)$

$\big\downarrow$ translatie $(-1\frac{1}{2}\pi, 0)$

$y = \sin(x + 1\frac{1}{2}\pi)$

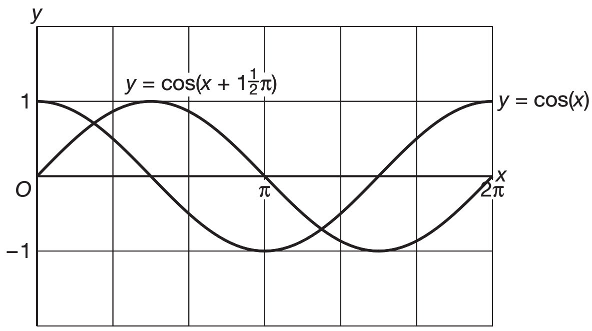


Dus $\sin(x + 1\frac{1}{2}\pi) = -\cos(x)$.

d $y = \cos(x)$

$\big\downarrow$ translatie $(-1\frac{1}{2}\pi, 0)$

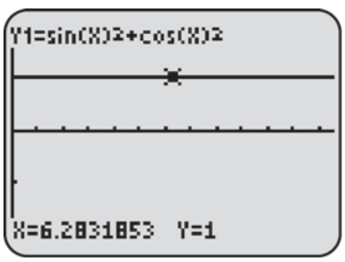
$y = \cos(x + 1\frac{1}{2}\pi)$



Dus $\cos(x + 1\frac{1}{2}\pi) = \sin(x)$.

bladzijde 57

34



Vermoeden: $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$.

35 **a** $f(x) = (\sin(x) - \cos(x))^2 = (\sin(x) - \cos(x)) \cdot (\sin(x) - \cos(x))$
$= \sin^2(x) - \sin(x)\cos(x) - \cos(x)\sin(x) + \cos^2(x)$
$= 1 - 2\sin(x)\cos(x)$

b $g(x) = \dfrac{2\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{2\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = 2\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 + 1 = 2\tan^2(x) + 1$

36 **a** $\sin(x)\cos(x-\frac{1}{2}\pi)-\cos(x)\sin(-x-\frac{1}{2}\pi)=\sin(x)\sin(x)-\cos(x)\sin(-(x+\frac{1}{2}\pi))$

$=\sin^2(x)-\cos(x)\cdot -\sin(x+\frac{1}{2}\pi)=\sin^2(x)+\cos(x)\cdot\cos(x)=\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

b $2\cos^2(x)\cdot(1+\tan^2(x))=2\cos^2(x)+2\cos^2(x)\cdot\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2=2\cos^2(x)+2\cos^2(x)\cdot\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$=2\cos^2(x)+2\sin^2(x)=2(\sin^2(x)+\cos^2(x))=2\cdot 1=2$

37 **a** $\sin^2(A)+\cos^2(A)=1$
$\sin^2(A)=1-\cos^2(A)$ $\quad -\cos^2(A)$

$\sin^2(A)+\cos^2(A)=1$
$\cos^2(A)=1-\sin^2(A)$ $\quad -\sin^2(A)$

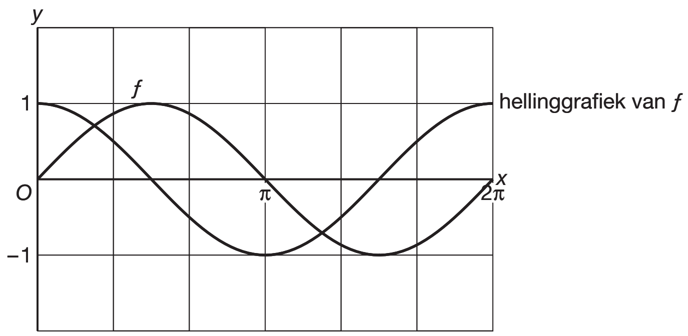
b $\sin^2(x)+2\cos(x)-1=1-\cos^2(x)+2\cos(x)-1=-\cos^2(x)+2\cos(x)=\cos(x)\cdot(-\cos(x)+2)$
$=\cos(x)\cdot(2-\cos(x))$
Dus $a=2$.

c $f(x)=0$ geeft $\cos(x)\,(2-\cos(x))=0$
$\cos(x)=0 \vee 2-\cos(x)=0$
$x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi \vee \cos(x)=2$
geen opl.
x op $[0, 2\pi]$ geeft $x=\frac{1}{2}\pi \vee x=1\frac{1}{2}\pi$

38 **a** $y=\sin^2(x)+\cos(x)=1-\cos^2(x)+\cos(x)=-\cos^2(x)+\cos(x)+1$
b $y=2\cos^2(x)+\sin(x)-2=2(1-\sin^2(x))+\sin(x)-2=2-2\sin^2(x)+\sin(x)-2=-2\sin^2(x)+\sin(x)$
c $y=2\sin^2(x)+\cos^2(x)+\cos(x)=2(1-\cos^2(x))+\cos^2(x)+\cos(x)$
$=2-2\cos^2(x)+\cos^2(x)+\cos(x)=-\cos^2(x)+\cos(x)+2$

10.4 Afgeleiden van goniometrische functies

39



40 **a** $f(x)=\sin(2x)=\sin(u)$ met $u=2x$ geeft $f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos(u)\cdot 2=2\cos(2x)$
b $f(x)=x\cdot\cos(x)$ geeft $f'(x)=1\cdot\cos(x)+x\cdot -\sin(x)=\cos(x)-x\sin(x)$
c $y=2\sin(4x)=2\sin(u)$ met $u=4x$ geeft $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2\cos(u)\cdot 4=8\cos(4x)$
$f(x)=3x+2\sin(4x)$ geeft $f'(x)=3+8\cos(4x)$
d $f(x)=\sin(x)\cdot\cos(x)$ geeft $f'(x)=\cos(x)\cdot\cos(x)+\sin(x)\cdot -\sin(x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$

41 **a** $y=-\cos(4x)=-\cos(u)$ met $u=4x$ geeft $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=--\sin(u)\cdot 4=4\sin(4x)$
$f(x)=x^2-\cos(4x)$ geeft $f'(x)=2x+4\sin(4x)$
b $f(x)=4x^2\cdot\cos(x)$ geeft $f'(x)=8x\cos(x)+4x^2\cdot -\sin(x)=8x\cos(x)-4x^2\sin(x)$
c $f(x)=\sin^2(x)=\sin(x)\cdot\sin(x)$ geeft $f'(x)=\cos(x)\cdot\sin(x)+\sin(x)\cdot\cos(x)=2\sin(x)\cos(x)$
d $y=\sqrt{\sin(x)}=\sqrt{u}$ met $u=\sin(x)$
$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\cos(x)=\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

42 **a** $y_A=f(\frac{1}{3}\pi)=2\sin(\frac{1}{3}\pi)=2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=\sqrt{3}$
b $f'(x)=2\cos(x)$
$f'(\frac{1}{3}\pi)=2\cos(\frac{1}{3}\pi)=2\cdot\frac{1}{2}=1$

c Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{3}\pi) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = x + b \\ \text{door } (\frac{1}{3}\pi, \sqrt{3}) \end{array}\right\} \sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi + b$$

$$\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi = b$$

Dus k: $y = x - \frac{1}{3}\pi + \sqrt{3}$.

43 $f(x) = 4\cos(2x) = 4\cos(u)$ met $u = 2x$ geeft

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -4\sin(u) \cdot 2 = -8\sin(u) = -8\sin(2x)$$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{3}\pi) = -8\sin(\frac{2}{3}\pi) = -8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -4\sqrt{3}x + b \\ f(\frac{1}{3}\pi) = 4\cos(\frac{2}{3}\pi) = 4 \cdot -\frac{1}{2} = -2 \text{ dus door } (\frac{1}{3}\pi, -2) \end{array}\right\} -2 = -4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}\pi + b$$

$$-2 = -\frac{4}{3}\pi\sqrt{3} + b$$

$$\frac{4}{3}\pi\sqrt{3} - 2 = b$$

Dus k: $y = -4\sqrt{3}\,x + \frac{4}{3}\pi\sqrt{3} - 2$.

44 $u = 2\sin(30\pi t)$ geeft $\frac{du}{dt} = 2 \cdot \cos(30\pi t) \cdot 30\pi = 60\pi\cos(30\pi t)$.

$$\left[\frac{du}{dt}\right]_{t=0} = 60\pi \cdot \cos(30\pi \cdot 0) = 60\pi\cos(0) = 60\pi.$$

De snelheid op $t = 0$ is 60π cm/s.

45 **a** $q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$

$$\frac{q(x)}{1} = \frac{t(x)}{n(x)}$$

$q(x) \cdot n(x) = 1 \cdot t(x)$
$q(x) \cdot n(x) = t(x)$.

b De productregel geeft $q'(x) \cdot n(x) + q(x) \cdot n'(x) = t'(x)$
Herleiden geeft $q'(x) \cdot n(x) = t'(x) - q(x) \cdot n'(x)$

$$q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$$

c $q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \dfrac{t'(x) - \frac{t(x)}{n(x)} \cdot n'(x)}{n(x)}$

$$q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

bladzijde 63

46 **a** $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ geeft $f'(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot -\sin(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

b $$\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \tan^2(x)$$

47 **a** $f(x) = \tan(2x) = \tan(u)$ met $u = 2x$ geeft $f'(x) = (1 + \tan^2(u)) \cdot 2 = 2(1 + \tan^2(2x))$
b $f(x) = x + \tan(x)$ geeft $f'(x) = 1 + 1 + \tan^2(x) = 2 + \tan^2(x)$
c $f(x) = x \cdot \tan(x)$ geeft $f'(x) = 1 \cdot \tan(x) + x \cdot (1 + \tan^2(x)) = \tan(x) + x + x\tan2(x)$
d $f(x) = \sin(x) \cdot \tan(x)$ geeft
$f'(x) = \cos(x) \cdot \tan(x) + \sin(x) \cdot (1 + \tan^2(x))$

$$= \cos(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \sin(x) + \sin(x) \cdot \tan^2(x)$$

$$= \sin(x) + \sin(x) + \sin(x) \cdot \tan^2(x)$$

$$= 2\sin(x) + \sin(x) \cdot \tan^2(x)$$

48 **a** $f(x) = \dfrac{2}{1+\sin(x)}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(1+\sin(x))\cdot 0 - 2\cdot\cos(x)}{(1+\sin(x))^2} = \dfrac{-2\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}$

b $f(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(1+\cos(x))\cdot\cos(x) - (1+\sin(x))\cdot -\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}$$
$$= \frac{\cos(x)+\cos^2(x)+\sin(x)+\sin^2(x)}{(1+\cos(x))^2}$$
$$= \frac{\sin(x)+\cos(x)+\sin^2(x)+\cos^2(x)}{(1+\cos(x))^2}$$
$$= \frac{\sin(x)+\cos(x)+1}{(1+\cos(x))^2}$$

c $y = \sin(2x) = \sin(u)$ met $u = 2x$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} = \cos(u)\cdot 2 = 2\cos(2x)$

$f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2+\sin(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(2+\sin(x))\cdot 2\cos(2x) - \sin(2x)\cdot\cos(x)}{(2+\sin(x))^2} = \frac{4\cos(2x)+2\sin(x)\cos(2x)-\sin(2x)\cos(x)}{(2+\sin(x))^2}$$

d $y = \sin(x-\frac{1}{4}\pi) = \sin(u)$ met $u = x-\frac{1}{4}\pi$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} = \cos(u)\cdot 1 = \cos(x-\frac{1}{4}\pi)$

$f(x) = \dfrac{\sin(x-\frac{1}{4}\pi)}{1+\cos(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(1+\cos(x))\cdot\cos(x-\frac{1}{4}\pi) - \sin(x-\frac{1}{4}\pi)\cdot -\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}$$
$$= \frac{\cos(x-\frac{1}{4}\pi)+\cos(x)\cdot\cos(x-\frac{1}{4}\pi)+\sin(x)\cdot\sin(x-\frac{1}{4}\pi)}{(1+\cos(x))^2}$$

49 **a** $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{\sin(x)\cdot -\sin(x) - \cos(x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-(\sin^2(x)+\cos^2(x))}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

b $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(1+\cos(x))\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot -\sin(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{\cos(x)+\cos^2(x)+\sin^2(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{\cos(x)+1}{(1+\cos(x))^2}$$

c $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(\sin(x)+\cos(x))\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(\cos(x)-\sin(x))}{(\sin(x)+\cos(x))^2}$$
$$= \frac{\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x)-\sin(x)\cos(x)+\sin^2(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^2} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^2} = \frac{1}{(\sin(x)+\cos(x))^2}$$

d $f(x) = \dfrac{4\sin(x)}{1-\sin(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(1-\sin(x))\cdot 4\cos(x) - 4\sin(x)\cdot -\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}$$
$$= \frac{4\cos(x)-4\sin(x)\cos(x)+4\sin(x)\cos(x)}{(1-\sin(x))^2} = \frac{4\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}$$

50 **a** $f(x) = \dfrac{2\sin(x)}{2+\sin(x)}$ geeft

$$f'(x) = \frac{(2+\sin(x))\cdot 2\cos(x) - 2\sin(x)\cdot\cos(x)}{(2+\sin(x))^2}$$
$$= \frac{4\cos(x)+2\sin(x)\cos(x)-2\sin(x)\cos(x)}{(2+\sin(x))^2} = \frac{4\cos(x)}{(2+\sin(x))^2}$$

$f'(x) = 0$ geeft $\dfrac{4\cos(x)}{(2+\sin(x))^2} = 0$

$4\cos(x) = 0$

$\cos(x) = 0$

$x = \frac{1}{2}\pi \ \vee \ x = 1\frac{1}{2}\pi$

$f(\frac{1}{2}\pi) = \dfrac{2\sin(\frac{1}{2}\pi)}{2+\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \dfrac{2 \cdot 1}{2+1} = \frac{2}{3}$ dus $A(\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3})$

$f(1\frac{1}{2}\pi) = \dfrac{2\sin(1\frac{1}{2}\pi)}{2+\sin(1\frac{1}{2}\pi)} = \dfrac{2 \cdot -1}{2+-1} = \dfrac{-2}{1} = -2$ dus $B(1\frac{1}{2}\pi, -2)$

b Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(\pi) = \dfrac{4\cos(\pi)}{(2+\sin(\pi))^2} = \dfrac{4 \cdot -1}{(2+0)^2} = \dfrac{-4}{4} = -1$.

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = -x + b \\ f(\pi) = \dfrac{2\sin(\pi)}{2+\sin(\pi)} = 0 \text{ dus } C(\pi, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 = -\pi + b \\ \pi = b \end{array}$

Dus k: $y = -x + \pi$.

51 **a** $f(x) = \sin^3(x) = u^3$ met $u = \sin(x)$

$f'(x) = 3u^2 \cdot \cos(x) = 3\sin^2(x) \cdot \cos(x)$

b $f'(x) = 3\sin^2(x) \cdot \cos(x) = 3 \cdot (1 - \cos^2(x)) \cdot \cos(x) = 3(\cos(x) - \cos^3(x)) = 3\cos(x) - 3\cos^3(x)$

bladzijde 64

52 $y = \cos^3(x) = u^3$ met $u = \cos(x)$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 3u^2 \cdot -\sin(x) = -3\cos^2(x) \cdot \sin(x)$

$g(x) = 2\cos^3(x) + 3\cos(x)$ geeft

$g'(x) = 2 \cdot -3\cos^2(x) \cdot \sin(x) - 3\sin(x)$ gebruik $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

$= -6(1 - \sin^2(x)) \cdot \sin(x) - 3\sin(x)$

$= -6\sin(x) + 6\sin^3(x) - 3\sin(x)$

$= 6\sin^3(x) - 9\sin(x)$

53 **a** $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ geeft

$f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot -\sin(x)$

$= \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$= 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)$

$= 1 - 2\sin^2(x)$

b Zie vraag a: $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$f'(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))$

$= \cos^2(x) - 1 + \cos^2(x)$

$= 2\cos^2(x) - 1$

54 $y = \sin^2(x) = u^2$ met $u = \sin(x)$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 2u \cdot \cos(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$

$f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x)$ geeft

$f'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin^2(x) \cdot -\sin(x)$

$= 2\sin(x) \cdot \cos^2(x) - \sin^3(x)$

$= 2\sin(x) \cdot (1 - \sin^2(x)) - \sin^3(x)$

$= 2\sin(x) - 2\sin^3(x) - \sin^3(x)$

$= 2\sin(x) - 3\sin^3(x)$

55 **a** De formule $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ is te herleiden tot de vorm $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.
Hiermee is $\sin^2(x)$ uitgedrukt in $\cos(x)$. Dus is $y = \sin^2(x) + \cos(x)$ uit te drukken in $\cos(x)$.
Wil je echter $y = \sin^2(x) + \cos(x)$ uitdrukken in $\sin(x)$, dan moet je een formule hebben waarbij $\cos(x) = \ldots$ staat met in het rechterlid alleen $\sin(x)$. Maar zo'n formule is er niet.

b $y = \sin(x) + \cos^2(x)$ is met behulp van $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ uit te drukken in $\sin(x)$.
Je krijgt dan $y = \sin(x) + 1 - \sin^2(x)$.
$y = 2\sin^2(x) + 3\cos^2(x)$ is uit te drukken in $\sin(x)$.
Je krijgt $y = 2\sin^2(x) + 3(1 - \sin^2(x))$

$= 2\sin^2(x) + 3 - 3\sin^2(x)$

$= 3 - \sin^2(x)$

Maar je kunt $y = 2\sin^2(x) + 3\cos^2(x)$ ook uitdrukken in $\cos(x)$.
Je krijgt dan $y = 2(1 - \cos^2(x)) + 3\cos^2(x)$

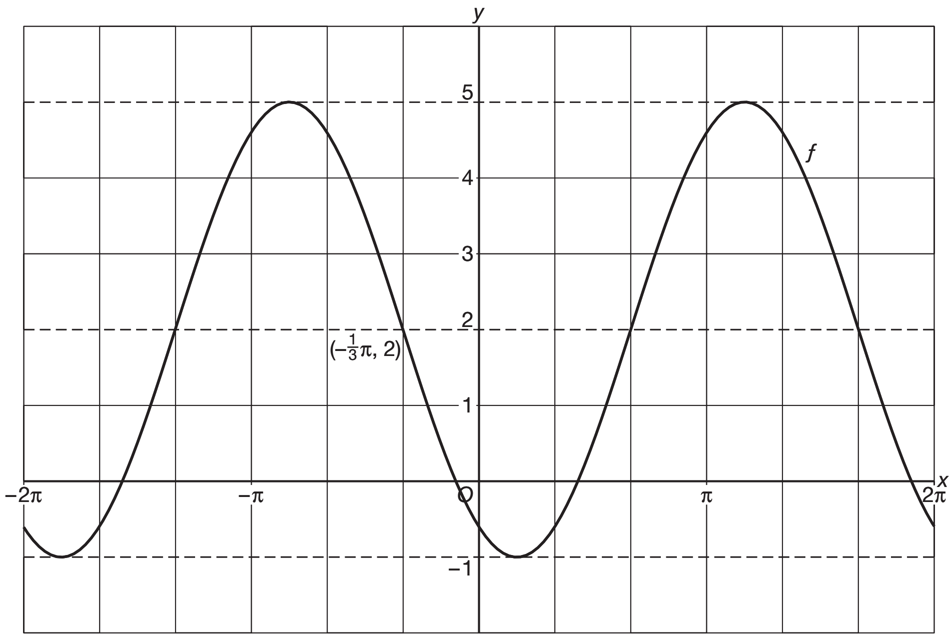
$= 2 - 2\cos^2(x) + 3\cos^2(x)$

$= 2 + \cos^2(x)$

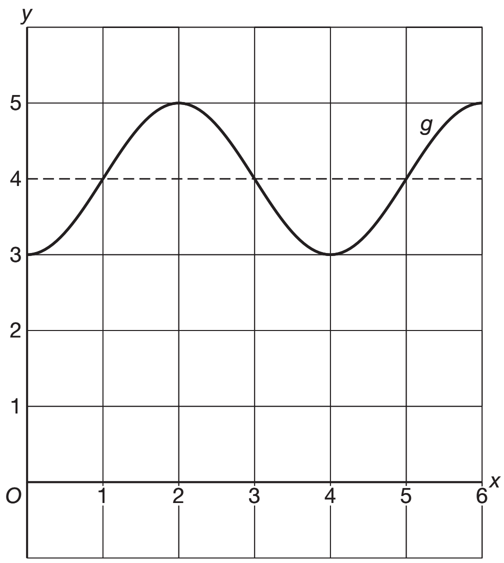
Diagnostische toets

bladzijde 66

1 **a** $f(x) = 2 - 3\sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ met $D_f = [-2\pi, 2\pi]$
evenwichtsstand 2
amplitude 3
periode 2π
$-3 < 0$ dus grafiek dalend door beginpunt $(-\frac{1}{3}\pi, 2)$



b $g(x) = 4 - \cos(\frac{1}{2}\pi x)$ met $D_g = [0, 6]$
evenwichtsstand 4
amplitude 1
periode $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$
$-1 < 0$ dus beginpunt $(0, 3)$ is laagste punt



2 **a** $N = a + b\sin(c(t - d))$
$a = \text{evenwichtsstand} = \dfrac{65 + -35}{2} = 15$
$b = \text{amplitude} = 65 - 15 = 50$
$c = \dfrac{2\pi}{\text{periode}} = \dfrac{2\pi}{30} = \frac{1}{15}\pi$
grafiek stijgend door beginpunt $(10, 15)$ dus $d = 10$
$N = 15 + 50\sin(\frac{1}{15}\pi(t - 10))$

b $N = a + b\sin(c(t - d))$

$a = 15$, $b = -50$, $c = \frac{1}{15}\pi$

grafiek dalend door beginpunt (25, 15) dus $d = 25$

$N = 15 - 50\sin(\frac{1}{15}\pi(t - 25))$

c $N = a + b\cos(c(t - d))$

$a = 15$, $b = 50$, $c = \frac{1}{15}\pi$

hoogste punt (17,5; 65) dus $d = 17{,}5$

$N = 15 + 50\cos(\frac{1}{15}\pi(t - 17{,}5))$

d $N = a + b\cos(c(t - d))$

$a = 15$, $b = -50$, $c = \frac{1}{15}\pi$

laagste punt (2,5; −35) dus $d = 2{,}5$

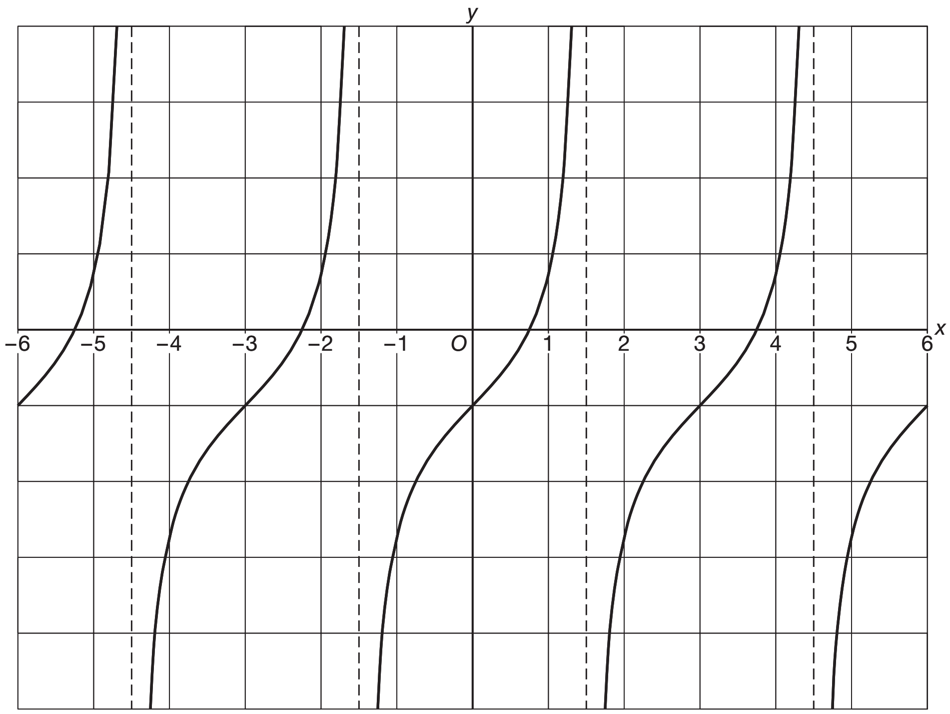
$N = 15 - 50\cos(\frac{1}{15}\pi(t - 2{,}5))$

3 **a** $f(x) = -1 + \tan(\frac{1}{3}\pi x)$

beginpunt $(0, -1)$

periode $= \dfrac{\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 3$

b



c $\frac{1}{3}\pi x = \frac{1}{2}\pi$ geeft $x = 1\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}\pi x = 1\frac{1}{2}\pi$ geeft $x = 4\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}\pi x = -\frac{1}{2}\pi$ geeft $x = -1\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}\pi x = -1\frac{1}{2}\pi$ geeft $x = -4\frac{1}{2}$

De asymptoten zijn $x = -4\frac{1}{2}$, $x = -1\frac{1}{2}$, $x = 1\frac{1}{2}$ en $x = 4\frac{1}{2}$.

d $-1 + \tan(\frac{1}{3}\pi x) = 0$

$\tan(\frac{1}{3}\pi x) = 1$

$\frac{1}{3}\pi x = \frac{1}{4}\pi$ geeft $x = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{3}\pi x = 1\frac{1}{4}\pi$ geeft $x = 3\frac{3}{4}$

$\frac{1}{3}\pi x = -\frac{3}{4}$ geeft $x = -2\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}\pi x = -1\frac{3}{4}$ geeft $x = -5\frac{1}{4}$

De nulpunten zijn $-5\frac{1}{4}$, $-2\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ en $3\frac{3}{4}$.

e $-1+\tan(\frac{1}{3}\pi x) = -1+\sqrt{3}$

$\tan(\frac{1}{3}\pi x) = \sqrt{3}$

$\frac{1}{3}\pi x \quad \frac{1}{3}\pi \vee \frac{1}{3}\pi x = 1\frac{1}{3}\pi$

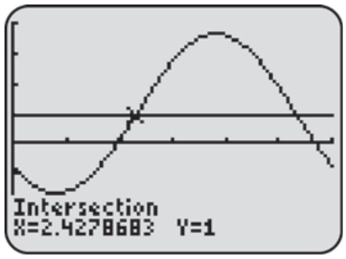
$x = 1 \;\vee\; x = 4$

Er zijn twee snijpunten (fout in leerboek) op het interval [0, 6]. Dit zijn $(1, -1+\sqrt{3})$ en $(4, -1+\sqrt{3})$.

4 Voer in $y_1 = 2 - 3\sin(x)$, $y_2 = -1 + 2\sin(x - \frac{1}{3}\pi)$ en $y_3 = y_1 + y_2$.
Bij y_1 en y_2 is $c = 1$, dus ook bij y_3 is $c = 1$.
Neem bijvoorbeeld Xmin = 0, Xmax = 2π, Ymin = –2 en Ymax = 4.
De opties minimum en maximum geven bij y_3 de toppen (0,857; –1,646) en (3,999; 3,646).

Dus $a \approx \dfrac{-1{,}646+3{,}646}{2} = 1$ en $b \approx 3{,}646 - 1 = 2{,}646$.

Voer in $y_4 = 1$.
Intersect met y_3 en y_4 geeft het snijpunt (2,428; 1). Dus $d \approx 2{,}428$.
Je krijgt $y_3 = 1 + 2{,}646\sin(x - 2{,}428)$.



5 **a**

	$u_1 = \sin(200\pi t)$	$u_2 = \sin(205\pi t)$	
in [0,2π]	200π periodes	205π periodes	deel door 5π
in $[0, \frac{2}{5}]$	40 periodes	41 periodes	

Dus de periode van $u = \sin(200\pi t) + \sin(205\pi t)$ is $\frac{2}{5}$ seconde.

b

	$u_1 = \sin(24t)$	$u_2 = \sin(26t)$	
in [0, 2π]	24 periodes	26 periodes	: 2
in [0, π]	12 periodes	13 periodes	

Dus de periode van $u = \sin(24t) + \sin(26t)$ is π seconden.

c

	$u_1 = 1{,}2\sin(\frac{1}{3}\pi t)$	$u_2 = 0{,}8\sin(\frac{1}{4}\pi t)$	
in [0, 2π]	$\frac{1}{3}\pi$ periodes	$\frac{1}{4}\pi$ periodes	$\times\dfrac{12}{\pi}$
in [0, 24]	4 periodes	3 periodes	

Dus de periode van $u = 1{,}2\sin(\frac{1}{3}\pi t) + 0{,}8\sin(\frac{1}{4}\pi t)$ is 24 seconden.

bladzijde 67

6 **a** $\sin^2(x) + (1 + \cos(x))^2 = \sin^2(x) + (1 + \cos(x)) \cdot (1 + \cos(x))$
$= \sin^2(x) + 1 + \cos(x) + \cos(x) + \cos^2(x)$
$= \sin^2(x) + \cos^2(x) + 1 + 2\cos(x) = 1 + 1 + 2\cos(x) = 2 + 2\cos(x)$

b $\dfrac{\sin(2x - \frac{1}{2}\pi)}{\cos(-2x)} = \dfrac{\sin(2x - \frac{1}{2}\pi)}{\sin(-2x + \frac{1}{2}\pi)} = \dfrac{\sin(2x - \frac{1}{2}\pi)}{-2\sin(2x - \frac{1}{2}\pi)} = -1$

c $\dfrac{\cos(2(x - \frac{1}{4}\pi))}{\sin(-2x)} = \dfrac{\cos(2x - \frac{1}{2}\pi)}{-\sin(2x)} = \dfrac{\sin(2x)}{-\sin(2x)} = -1$

7 **a** $y = 3\sin^2(x) + \cos(x) = 3(1 - \cos^2(x)) + \cos(x)$
$= 3 - 3\cos^2(x) + \cos(x) = -3\cos^2(x) + \cos(x) + 3$

b $y = 5\sin(x) - \frac{1}{2}\cos^2(x) + 2 = 5\sin(x) - \frac{1}{2}(1 - \sin^2(x)) + 2$
$= 5\sin(x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2(x) + 2 = \frac{1}{2}\sin^2(x) + 5\sin(x) + 1\frac{1}{2}$

c $y = \tan^2(x) + 1 = \left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 + 1 = \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 = \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

8 **a** $f(x) = x^2 + 2\cos(x)$ geeft $f'(x) = 2x - 2\sin(x)$
b $g(x) = 2x^2 \cdot \cos(x)$ geeft
$g'(x) = 4x \cdot \cos(x) + 2x^2 \cdot -\sin(x) = 4x\cos(x) - 2x^2\sin(x)$
c Stel $h(x) = \cos(2x^2) = \cos(u)$ met $u = 2x^2$.

$h'(x) = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = -\sin(u) \cdot 4x = -4x\sin(2x^2)$

d Stel $g(x) = \sqrt{2+\cos(x)} = \sqrt{u}$ met $u = 2 + \cos(x)$.

$$g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot -\sin(x) = -\frac{\sin(x)}{2\sqrt{2+\cos(x)}}$$

9 **a** $y = \cos^2(x) = u^2$ met $u = \cos(x)$ geeft

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot -\sin(x) = -2\sin(x)\cos(x)$$

$f'(x) = 1 \cdot \cos^2(x) + x \cdot -2\sin(x)\cos(x) = \cos^2(x) - 2x\sin(x)\cos(x)$

b Stel k: $y = ax + b$.

$a = f'(\pi) = \cos^2(\pi) - 2\pi \cdot \sin(\pi) \cdot \cos(\pi) = (-1)^2 - 2\pi \cdot 0 \cdot -1 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = x + b \\ y_A = f(\pi) = \pi \cdot \cos^2(\pi) = \pi, \text{ dus } A(\pi, \pi) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \pi = \pi + b \\ 0 = b \end{array}$$

Dus k: $y = x$.

10 **a** $y = \tan(3x) = \tan(u)$ met $u = 3x$ geeft

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (1 + \tan^2(u)) \cdot 3 = 3 + 3\tan^2(3x)$$

$f(x) = \tan(3x) - 2x$ geeft $f'(x) = 3 + 3\tan^2(3x) - 2 = 1 + 3\tan^2(3x)$

b $y = \tan(3x) = \tan(u)$ met $u = 3x$ geeft

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (1 + \tan^2(u)) \cdot 3 = 3 + 3\tan^2(3x)$$

$g(x) = 2x\tan(3x)$ geeft $g'(x) = 2 \cdot \tan(3x) + 2x \cdot (3 + 3\tan^2(3x)) = 6x\tan^2(3x) + 2\tan(3x) + 6x$

11 **a** $f(x) = \dfrac{2\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ geeft

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin(x)+\cos(x)) \cdot -2\sin(x) - 2\cos(x) \cdot (\cos(x) - \sin(x))}{(\sin(x)+\cos(x))^2} \\ &= \frac{-2\sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) - 2\cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^2} \\ &= \frac{-2\sin^2(x) - 2\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^2} \\ &= \frac{-2(\sin^2(x)+\cos^2(x))}{(\sin(x)+\cos(x))^2} = \frac{-2}{(\sin(x)+\cos(x))^2} \end{aligned}$$

b $g(x) = \dfrac{2\cos(x)}{1-\cos(x)}$ geeft

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(1-\cos(x)) \cdot -2\sin(x) - 2\cos(x) \cdot \sin(x)}{(1-\cos(x))^2} \\ &= \frac{-2\sin(x) + 2\cos(x)\sin(x) - 2\cos(x)\sin(x)}{(1-\cos(x))^2} = \frac{-2\sin(x)}{(1-\cos(x))^2} \end{aligned}$$

12 $f(x) = \sin(x)\cos^3(x)$

Eerst de afgeleide van $y = \cos^3(x) = u^3$ met $u = \cos(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot -\sin(x) = -3\sin(x) \cdot \cos^2(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \cdot \cos^3(x) + \sin(x) \cdot -3\sin(x)\cos^2(x) \\ &= \cos^4(x) - 3\sin^2(x)\cos^2(x) \\ &= \cos^4(x) - 3(1 - \cos^2(x)) \cdot \cos^2(x) \\ &= \cos^4(x) - 3\cos^2(x) + 3\cos^4(x) \\ &= 4\cos^4(x) - 3\cos^2(x) \end{aligned}$$